**Функції векторного аргументу**

Нехай К- поле, K=R або K=C. Векторним (лінійним) простором над полем К називається впорядкована трійка (E,+,•), яка складається з множини E,елементи якої називаються векторами, операції додавання, та операції множення на елементи (числа) поля К.

Вказані операції повинні мати властивості, які називаються аксіомами векторного простору: 

1)x+y=y+x;

2)(x+y)+z=x+(y+z)

3) -  0-вектора;

4) -  протилежного вектора;

5)

6)

7)

Для спрощення записів замість трійки (E,+,•) користуються векторним простором Е, вважаючи його дійсним, коли К = R , і комплексним, коли K=C. У довільному векторному просторі Е виконуються такі властивості:



1);

2) ;

3) (-1)x= -х.

Дійсно, із аксіоми 5)при 

При (-1)x=-x; , при 

Е=R – векторний простір над R, очевидно, що поле R є векторний простір над цим полем.

- , м-мірний координатний простір ,кожна точка якого - упорядкований набір з m дійсних чисел .

Покладемо

;



Для цих операцій виконуються аксіоми 1-7.

Вектори називаються точками простору і позначають т. 

( - трьохвимірний простір).

**Нормований векторний простір**

**Означення.1** Нехай (Е,+,•) векторний простір над полем К. Відображення  називається нормою (довжиною) у просторі , якщо  виконуються такі аксіоми :

1);2);3) (нерівність трикутника);

**Означення.2** Упорядкований набір  називається нормованим простором. З аксіом 2) і 3) .

**Означення.3** Вектор х називається границею послідовності векторів  якщо.

Якщо послідовність  векторів нормованого простору Е збігається до вектора х, то , це властивість неперервності норми .

Приклади норм:

,(Евклідова норма)o

(октаедрична норма)

 (кубічна норма) 

Всі запроваджені в  норми – еквівалентні.

**Метричні простори**

Одною із фундаментальних характеристик взаємного розміщення точок множини є відстань між ними.

**Означення.4** Нехай Е – довільна множина. Відображення  називається метрикою, якщо  виконуються аксіоми:

1)

2) (симетрія);

3) (нерівність трикутника).

Упорядкована пара називається метричним простором.

Наприклад:  аксіома 3): 

Всякий нормований векторний простір є метричним, якщо метрика 

**Означення.5** Нехай метричний простір,  Точка називається границею послідовності , якщо і записується 

Послідовність точок метричного простору, яка має границю, називається збіжною.

**Види множин простору **

У теорії метричних просторів використовується мова класичної геометрії. Нехай - метричний простір, 

**Означення.6** Множина називається відкритою кулею радіуса  з центром у т. , а також околом точки 

**Означення.7**  Множина називається замкненою кулею радіуса  з центром у т. 

**Означення.8** Множина називається сферою радіуса  з центром у точці .

**Означення.9** - метричний простір, А та В дві непорожні множини. Додатне число  називається відстанню від А до В.

**Означення.10** Діаметром множини А називається число 

**Означення.11**  - метричний простір, не порожня множина. Якщо діаметр множини А – скінченний, то вона називається обмеженою.

**Означення.12** Відкритою множиною в метричному просторі  називається підмножина , яка має властивість: 

**Означення.13** Множина називається замкненою, якщо її доповнення є відкритою множиною (всі граничні точки множини належать самій множині).

**Означення.14** Точка  називається граничною точкою множини , якщо з неї можна виділити послідовність різних точок, збіжних до за метрикою простору 

**Означення.15** Множина  називається компактною в просторі  якщо будь-яка послідовність  елементів з К містить збіжну підпослідовність. Якщо їх границі належать множині К, то вона називається компактом (будь-яка обмежена в просторі множина – компактна).

**Відображення множин**

Нехай Х та У- довільні метричні простори , означає , що кожному елементу  ставиться у відповідність , який називається образом цього елемента і множина  називається повним прообразом простору.

Якщо , , .

Якщо ,-функція двох змінних.

Якщо  - функція 3-х змінних , фізичний зміст якої є густина або кількість речовини.

**Означення.1** Лінією рівня називається геометричне місце точок  , в яких функція приймає одне стале значення.

 - сімейство концентричних кіл.

**Означення.2** Поверхнею рівня називається Г.М.Т.  ,в яких функція приймає одне стале значення.



 - конус;

 - двопорожневий гіперболоїд;

 - однопорожневий гіперболоїд.

**Границя функції**

**Означення(за Коші)** .Число  - границя функції  при  (,  – гранична точка ), якщо , або цей факт записують так: , і називають А n – кратною границею.

Якщо подвійна границя.

**Приклади:**

1) 



2) 

 Результат залежить від k, отже подвійної границі в точці не існує.

Крім одночасного прямування аргументів до границі, маємо границі, що отримуємо при послідовних граничних переходах по кожному аргументу окремо, в тому, чи іншому порядку.

**Означення.** Нехай 



. . . . . .

 - називається повторною границею, якщо існує границя при  при всіх фіксованих попередніх границях.

**Приклади:**

1) 

Обидві повторні границі  і  не існують, але подвійна границя існує і , це випливає із нерівності 

2)  а подвійна не існує.

**Зв’язок між подвійною і повторною границями.**

**Теорема. ** Нехай вико

нуються умови:

1)  - подвійна границя;

2) при фіксованому , тоді .

Дійсно,  Зафіксуємо перейдемо до границі при :  

**Неперервне відображення.**

Х, У – метричні простори, **** точка - гранична точка 

**Означення. **неперервна в точці , якщо 

**Означення (за Коші). **неперервна в точці , якщо 

**Означення (за Гейне). **неперервна в точці , якщо для  відповідає послідовність 

Мають місце теореми про арифметичні дії над дійсними неперервними функціями, аналогічні теоремам для функції однієї змінної.

**Неперервність в **

точка  точка - гранична точка Е.

**Означення 1. ** неперервна в точці **** якщо .

**Означення 2. ** точка ** **

**Означення приросту**

Виходячи із значень  надамо належним змінним  деякі прирости . Назвемо повним приростом функції  в точці **** вираз . Відображення **** неперервне в точці , якщо нескінченно малому приросту аргументів відповідає нескінченно малий приріст функції (при ).

**Приклад. **

 неперервна в точці (0,0), якщо має місце .

 неперервна в точці (0,0) по змінній  і неперервна  по змінній , але не є неперервною по .

**Властивості неперервного відображення на компакті**

**Перша теорема Вейєрштрасса.** Якщо ****неперервне відображення компактного простору К в  то ****обмежена на К.

**Доведення**. Припустимо супротивне: існує точка 

Оскільки К-компактний простір, то  Оскільки ****неперервна на К, то  а з іншого боку скінченне, що суперечить умові необмеженості функції. Якщо  то маємо відому теорему Вейєрштрасса для 

**Друга теорема Вейєрштрасса.** Нехай  . Тоді існують точки ,  в яких функція досягає свого найбільшого і найменшого значення: 

Мають місце аналоги теорем Больцано-Коші. Аналогом скінченному проміжку в  є обмежена зв’язна область.

**Означення.** Множина  називається зв’язною, якщо будь-які дві точки множини з’єднати ламаною зі скінченною кількістю ланок, що цілком належать множині Е.

**Теорема 1.(Перша теорема Больцано-Коші) **неперервне відображення зв’язної множини з  в ). Якщо в двох точках  і :  то існує точка : .

**Означення. **довільні метричні простори. Відображення  рівномірно неперервне на Е, якщо  як тільки , то 

**Теорема Кантора** (про рівномірну неперервність на компакті). Якщо  - неперервне відображення компакту К в довільний простір рівномірно неперервне на К.

**Диференційне числення функцій багатьох змінних.**

**Частинні похідні, частинний диференціал.**

Маємо  Візьмемо точку  довільні прирости.

приріст функції.

частинний приріст по змінній .

 частинний приріст по змінній .

частинний приріст по змінній .

**Означення.** Якщо існує скінченна границя відношення частинного приросту функції до відповідного приросту аргументу  то вона називається частинною похідною по відповідній змінній. Можливі інші позначення: 

**Приклад.** Знайти частинні похідні функцій:





в точці  знайдемо похідні за означенням:  Аналогічна похідна по .

Добуток частинної похідної на довільний приріст називається частинним диференціалом:



Нагадаємо, що для диференційовна в точці  якщо  де  і диференційовність ототожнювалась з існуванням похідної. Аналогічна формула має місце для функції трьох змінних.

**Означення диференційовності. **називається диференційовною в точці , якщо повний приріст функції в цій точці можна подати у вигляді  де  що не залежать від , а  залежить від метрики простору:  - віддаль між точками  та .

Якщо функція диференційовна, то лінійна частина повного приросту функції називається повним диференціалом.



**Теорема(про існування частинних похідних).** Якщо функція ****, диференційовна в точці , то існують частинні похідні:   

**Доведення**. Дійсно, якщо функція диференційовна в точці , то 

Нехай  тоді  і існує  Аналогічно для 

Отже диференційовна в точці , якщо 

**Приклад. ** Дослідити на диференційовність в точці (0,0).



не існує. Отже, функція недиференційовна в точці (0,0).

Відмітимо, що обернене до теореми твердження невірне, існування частинних похідних не забезпечує диференційовності функції.

**Достатні умови диференційовності функції.**

**Теорема.** Для того, щоб функція була диференційовною в точці  достатньо існування неперервних частинних похідних по всім змінним у цій точці.

Головна лінійна частина повного приросту функції називається повним диференціалом і записується :  Повний диференціал є сумою частинних диференціалів.

**Геометрична інтерпретація частинних похідних функції 2-х змінних.**

Розглянемо деяку поверхню і точку  на ній, - довільна точка. дотична площина в точці , якщо віддаль  змінної точки  до цієї площини при прямуванні віддалі  до 0 є нескінченно малою вищого порядку малості ніж , тобто або 

Для того, щоб поверхня  в точці , де  мала дотичну площину необхідно і достатньо, щоб при  і  функція  була диференційовною.

При перетині поверхні  площинами  та  отримаємо криві, кутові коефіцієнти яких дорівнюють відповідно  та .

**Наближена формула обчислення.  **

**Приклад.** Обчислити ****

** **

** **

****

**Інваріантність форми диференціала.**

**** диференційовна в довільній точці  і  Тут достатньо малі довільні константи, х та у – незалежні змінні. Нехай х та у є функціями нових змінних  і  і мають неперервні частинні похідні . Тоді існують похідні від складної функції  по  і .





Перегрупуємо доданки: .

Отже, для функцій багатьох змінних має місце інваріантність форми першого диференціала.

Справедливі правила диференціювання:

1. 
2. 
3. 
4. 

**Приклад. **

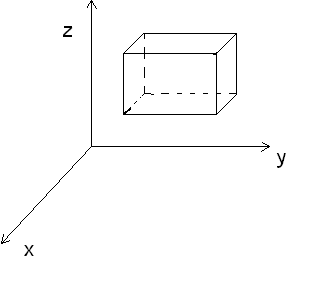
****

**Похідна за напрямком, градієнт.**

З’ясуємо поняття “швидкості зміни” або похідної за довільним заданим напрямком.

Нехай , .

Проведемо із точки М вектор S з напрямними косинусами (). На векторі S на віддалі ΔS від його початку, розглянемо точку М1 (), , *и* – неперервна і має неперервні частинні похідні



М

# М1

Δх

Δу

Δz

S

ΔS





,,



Отже, похідна від *и* в точці М(х,у,z) в напрямку вектора  це 

Зокрема, при α=0,  отримаємо . Частинні похідні по х,у,z виражають “швидкість” зміни функції в напрямку координатних вісей.

Виникає питання: за яким напрямком функція в заданій точці буде швидше зростати?

В кожній точці Е, де задана ** визначимо вектор, проекції якого на вісі координат є значення частинних похідних ,,. Позначимо цей вектор .

Таким чином, в Е визначено векторне поле градієнтів. Можна довести, що похідна за напрямком S дорівнює проекції вектора  на S : .











**Властивості градієнта**

1. Похідна за напрямком вектора S в точці М має найбільше значення, якщо напрямок S співпадає з напрямком , це найбільше значення рівне 



1. Похідна за напрямком вектора, перпендикулярного до градієнта  дорівнює нулю: 
2. Якщо ,  належить ХОУ, лінії рівня , що лежить в площині ХОУ.



1. направлений по нормалі до поверхні рівня, що проходить через задану точку.

**Похідні вищих порядків**

Нехай  - диференційовна в точці , а, отже, частинні похідні , які є функціями змінних і від них можна брати похідні. Позначають другу похідну, наприклад, по х: . Частинні похідні по різним змінним називають мішаними похідними: ,  і т. д.

- похідна за означенням.

Для функції двох змінних , маємо 2 частинні похідні І порядку  і чотири частинні похідні другого порядку 

Частинних похідних третього порядку буде вже вісім.

Приклад:. Знайдемо мішану похідну:



Природно ставити питання чи залежить результат диференціювання функцій багатьох змінних від послідовності диференціювання по різним змінним, тобто чи тотожні, наприклад, .

Справедлива **теорема** (про мішані похідні, Шварца)

 в деякому околі точки Р0  і неперервні в точці Р0, тоді в цій точці похідна не залежить від порядку її обчислення і 

Якщо мішані похідні не будуть неперервні в точці Р0 , то теорема може не виконуватись.

**Означення.**  називається *п* раз диференційовною в точці Р0 , якщо частинні похідні по всім змінним до (*п*-1) порядку, і кожна з них як функція диференційовна в точці Р0.

**Теорема.** Якщо  двічі диференційовна в точці Р0 є Е, то справедлива рівність: 

Має місце загальна теорема про мішані похідні.

Якщо , *п*-раз диференційовна в точці Р0 , то похідна *п*-того порядку не залежить від послідовності її обчислення.

**Диференціали вищих порядків**

, .

Нехай існує такий окіл , що  диференційована :

,

.

Якщо визначений в околі  і диференційовний в точці  , то його диференціал називається другим диференціалом в точці :





Визначимо диференціали для функції двох змінних:





. Останній вираз є символічним записом.







Диференціал *п*-го порядку для :





**Неінваріантність форми диференціалів вищих порядків**





.

**Формула Тейлора**

Якщо  є є , то

, ,

або

,

де , .

В цій формі формула Тейлора розповсюджується на випадок функції багатьох змінних.

**Теорема Тейлора**. Нехай , має неперервні частинні похідні до *п*+1 порядку в околі точки . Тоді для  точки Р із околу точки Р0 справедливо ,

, .